Cadre : On fixe (E,d) un espace métrique et A une partie de E.

I Espaces connexes

1) Définitions

Proposition 1. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Il n'existe pas de partition de E en deux ouverts non vides disjoints.

(ii) Il n'existe pas de partition de E en deux fermés non vides disjoints.

(iii) Les seuls ouverts et fermés de E sont $\varnothing$ et E.

Définition 2. Un espace métrique vérifiant l'une des assertions de la proposition précédente est dit connexe.

Remarque 3. *La connexité est une notion topologique.*

Exemple 4. *$\mathbb{R}$ est connexe, $\{0,1\}$ n'est pas connexe.*

Proposition 5. *Dire que A est connexe pour la topologie induite équivaut aux propositions suivantes :*

(i) Si $A \subset O_1 \cup O_2$, où O_1 et O_2 sont deux ouverts disjoints, alors :

$$(A \cap O_1 = \varnothing \quad \text{et} \quad A \subset O_2) \quad \text{ou} \quad (A \cap O_2 = \varnothing \quad \text{et} \quad A \subset O_1)$$

(ii) Si $A \subset F_1 \cup F_2$, où F_1 et F_2 sont deux fermés disjoints, alors :

$$(A \cap F_1 = \varnothing \quad \text{et} \quad A \subset F_2) \quad \text{ou} \quad (A \cap F_2 = \varnothing \quad \text{et} \quad A \subset F_1)$$

Exemple 6. *$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ n'est pas connexe.*

2) Propriétés

Théorème 7. *Soit $f : (E,d) \to (E',d')$ une application continue entre espaces métriques. Si E est connexe, alors $f(E)$ est connexe.*

Proposition 8. *(E,d) est connexe si, et seulement si, toute application continue de (E,d) dans $\{0,1\}$ muni de la distance discrète est constante.*

Remarque 9. *On peut remplacer $\{0,1\}$ par tout espace discret ayant plus de deux points, comme $\mathbb{Z}$ par exemple.*

Proposition 10. *Soient A connexe et $B \subseteq E$ vérifiant $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Alors B est connexe. En particulier, $\overline{A}$ est connexe.*

Proposition 11. *Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de connexes de E. S'il existe $i_0 \in I$ tel que $C_i \cap C_{i_0} \neq \varnothing$ pour tout $i \in I$, alors $\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe.*

Remarque 12. *En particulier, si $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \varnothing$ alors $\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe.*

Proposition 13. *Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de connexes de E, avec $I = \mathbb{N}$ ou $[\![0,n]\!]$. Si $C_{i-1} \cap C_i \neq \varnothing$ pour tout $i \in I \setminus \{0\}$, alors $\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe.*

Théorème 14. *Soient $(E_1,d_1),\dots,(E_n,d_n)$ des espaces métriques. L'espace produit $E = \prod_{i=1}^n E_i$ est connexe si et seulement si E_i est connexe pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.*

Remarque 15. *Une intersection de connexes n'est pas toujours connexe.*

Proposition 16. *Soit (E,d) un espace métrique compact et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E telle que $\lim_{n\to+\infty} d(u_n,u_{n+1}) = 0$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est connexe.*

Application 17. *Soient $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$.*

3) Composantes connexes

Définition 18. On définit la relation d'équivalence $\sim$ sur E pour $x,y \in E$ par $x \sim y$ si, et seulement si, il existe un connexe C de E tel que $x \in C$ et $y \in C$. Les classes sont appelées composantes connexes de E.

Proposition 19. *La composante connexe de $x \in E$, notée $C(x)$, est l'union des connexes de E contenant x. Les composantes connexes de E sont des ouverts deux à deux disjointe.*

Proposition 20. *Soit $f : E \to F$ un homéomorphisme. Alors f induit une bijection entre les composantes connexes de E et F.*

Théorème 21 (Jordan, admis)**.** *Toute courbe continue fermé simple à valeurs dans $\mathbb{C}$ d'image J est telle que $\mathbb{C} \setminus J$ a deux composantes connexes, une bornée C_0 et une non bornée C_∞, toutes deux de frontière J.*

4) Connexité par arcs

Définition 22. On appelle chemin de E toute application continue $\gamma : [0,1] \to E$. Son image $\gamma([0,1])$ est appelée un arc, $\gamma(0)$ son origine et $\gamma(1)$ son but. On dit que γ lie $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$.

Définition 23. L'espace E est dit connexe par arcs si, pour tous $a, b \in E$, il existe un chemin liant a et b.

Théorème 24. *La connexité par arcs entraîne la connexité.*

Exemple 25. *La réciproque est fausse : l'adhérence du graphe de la fonction $x \longmapsto \sin(\frac{1}{x})$ définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ est connexe non connexe par arcs.*

Proposition 26. *Pour un ouvert d'un espace vectoriel normé, la connexité est équivalente à la connexité par arcs.*

II Connexité et applications

1) Analyse réelle

Proposition 27. *Les connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles de $\mathbb{R}$. Ce sont aussi les convexes de $\mathbb{R}$.*

Application 28. *L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.*

Théorème 29 (Darboux)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Alors $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Théorème 30. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $U \subseteq E$ un ouvert et $f : U \to F$ différentiable sur U. Soient $a, b \in U$ et $k > 0$. Alors :*

$$\forall x \in [a,b],\ \|d_x f\|_{L(E,F)} \leqslant k \quad \Rightarrow \quad \|f(b) - f(a)\|_F \leqslant k \|b - a\|_E$$

Corollaire 31. *Avec les notations du théorème précédent, si U est connexe, et si $d_x f = 0$ pour tout $x \in U$, alors f est constante sur U.*

Théorème 32 (Brouwer)**.** *Toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet (au moins) un point fixe.*

2) Analyse complexe

Définition 33. Un domaine de $\mathbb{C}$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ non vide. On fixe un tel Ω par la suite. On appelle lacet dans $\mathbb{C}$ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Définition 34. Soit γ un lacet de $\mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$. On définit l'indice $\mathrm{Ind}_\gamma(a)$ de a par rapport à γ par :

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{z-a} dz$$

Proposition 35. *La fonction Ind_γ est à valeurs entières sur Ω, constante sur les composantes connexes de Ω, et nulle sur la composante non bornée.*

Théorème 36 (Cauchy)**.** *Soient Ω un ouvert convexe et $z_0 \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$, alors pour tout lacet γ de Ω, on a $\int_\gamma f = 0$.*

Théorème 37 (Formule de Cauchy)**.** *Soient Ω est un ouvert convexe, $z \in \Omega$, γ un lacet de $\Omega \setminus \{z\}$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors on a :*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Théorème 38 (Liouville)**.** *Toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée est constante.*

Corollaire 39 (Théorème de d'Alembert)**.** *Tout polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet au moins une racine.*

Théorème 40. *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ connexe, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ et $z_0 \in \Omega$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(z_0) = 0$
(ii) *f est nulle sur un voisinage de z_0*
(iii) *f est nulle sur Ω*

Corollaire 41. *Soient f et g holomorphes sur Ω un connexe de $\mathbb{C}$. Si f et g coïncident sur un voisinage d'un point de Ω, alors $f = g$.*

Théorème 42 (Zéros isolés)**.** *Soient Ω un connexe de $\mathbb{C}$ et f holomorphe sur Ω et non identiquement nulle, alors les zéros de f sont isolés.*

Corollaire 43. *Si deux fonctions holomorphes coïncident sur un ensemble admettant un point d'accumulation, alors elles sont égales.*

Exemple 44. *Il n'existe pas de fonction holomorphe sur $D(0,1)$ tel que pour tout $n \geqslant 1$, $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = -\frac{1}{n^3}$.*

Théorème 45 (Principe du maximum)**.** *Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $|f|$ atteint son maximum en un point de Ω, alors f est constante.*

Théorème 46 (Théorème des résidus)**.** *Soient $S \subset \Omega$ fini, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus S)$ et γ un lacet dans Ω ne rencontrant pas S, alors :*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{c \in S} \mathrm{Ind}_\gamma(c) \,\mathrm{Res}(f, c)$$

Exemple 47. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

Exemple 48. *Soit $\alpha \in]-1, 1[$. Alors $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln x}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi^2}{4\cos^2(\frac{\alpha\pi}{2})}$.*

III Connexité des espaces de matrices

Proposition 49. *$\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sont connexes.*

Proposition 50. *$\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ne sont pas connexes.*

Lemme 51. *Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$.*

Théorème 52. $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$

Théorème 53. $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \left\{A^2 \,\middle|\, A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\right\}$

Développements

— Connexité des valeurs d'adhérence d'une suite (16,17) [Gou08] [FGN13d]

— Surjectivité de l'exponentielle de matrice (51,52,53) [Zav13]

— Calcul d'une intégrale par le théorème des résidus (48) [Tau06]

Références

[Gou08] X. Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse.* Ellipses
[CG13] P. Caldero et J. Germoni. *Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries 1.* Calvage et Mounet
[ZQ13] C. Zuily et H. Queffélec. *Analyse pour l'agrégation.* Dunod
[Rud09] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Dunod
[Tau06] P. Tauvel. *Analyse complexe pour la licence 3.* Dunod
[FGN13d] S. Francinou, H. Gianella, et S. Nicolas. *Oraux X-ENS Analyse 1.* Cassini
[Zav13] M. Zavidovique. *Un Max de Math.* Calvage et Mounet